

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

УДК 624.19-044.923/.963

А. Л. ТЮТЬКИН*

* Кафедра «Мости и тоннели», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (066) 290 45 18, эл. почта tutkin@mail.ru, ORCID 0000-0003-4921-4758

КОНЦЕПЦИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИКО-ФРАКТАЛЬНОГО ПОДХОДА

Цель. Для оценки энергии различных степеней разрушения подземных сооружений требуется разработать новый подход, который смог бы учесть постепенное протекание энергии при формировании напряженно-деформированного состояния системы «подземное сооружение – окружающий массив» и ее накопление. **Методика.** Для разработки новой концепции разрушения подземных сооружений наиболее плодотворным является энергетико-фрактальный подход, который включает в себе оперирование удельной энергией и фрактальные представления о природе разрушения. Определение энергии опирается на классическое предложение Бельтрами об определении энергии деформирования, отнесенной к единице объема (удельная энергия деформирования). **Результаты.** Определено, что процесс разрушения подземных сооружений в рамках фрактальных представлений может быть теоретически представлен в виде перколяции по ветвям иерархического фрактального дерева Кейли. Выяснено, что перколяция является удобным концептуальным приемом для описания критических явлений, одним из которых является явление разрушения, подготавливаемое эволюцией структуры в процессе формирования напряженно-деформированного состояния и происходящее внезапно при превышении материалом предела прочности. Предложено дерево Кейли для многоуровневого разрушения железобетонной конструкции, определены его свойства. Для практических расчетов в рамках энергетико-фрактального подхода проведен численный анализ трехсводчатой станции колонного типа. Проведен сравнительный анализ полученной удельной энергии разрушения со значениями, полученными в ходе энергетического постпроцессинга. **Научная новизна.** Применение энергетико-фрактального подхода к разрушению подземных сооружений является новой методологией анализа напряженно-деформированного состояния, в котором напряженное и деформированное состояние не разделяются, а связаны в удельной энергии деформирования. **Практическая значимость.** Теоретические построения теории разрушения подкрепляются практическими данными, что позволяет наметить новые концептуальные положения разрушения подземных сооружений.

Ключевые слова: подземное сооружение; дерево Кейли; перколяция; энергетико-фрактальный подход

Введение

Исследование прочности конструкций подземных сооружений, взаимодействующих с окружающим породным или грунтовым массивом, который в общем случае может иметь вязко-упруго-пластические свойства, чаще всего основывается на отдельном рассмотрении напряженного и деформированного состояний [1-5]. Как в теоретических методах, основывающихся на положениях механики твердого деформируемого тела (механики сплошной среды), так и в практических методиках, базирующихся на аналитических построениях строительной механики, результаты расчетов анализируются исходя из нормативов прочно-

сти (первое предельное состояние) и норм, ограничивающих перемещения исследуемой конструкции (второе предельное состояние) [2-4]. Таким образом, процесс, приводящий к разрушению, считается относящимся большей степенью к первому предельному состоянию, и анализ напряженного состояния становится главенствующим для определения прочности конструкций подземных сооружений. Второе предельное состояние определяется как повелительное, нормы по деформациям характеризуют лишь возможность нормального эксплуатационного состояния, но не разрушения.

Однако реальное подземное сооружение, взаимодействующее с окружающим породным или грунтовым массивом, не воспринимает от-

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

дельно напряженное и деформированное состояния, которые формируются и изменяются в конструкции и массиве одновременно, т.е. их разделение искусственно. Соответственно, часто употребляемое в литературе словосочетание «напряженно-деформированное состояние» (НДС) означает не совокупность и неразрывность двух состояний, а устоявшийся стереотип научной терминологии.

Как уже было доказано многими исследователями, а также авторскими построениями, изложенными в докторской диссертации, искусственность разделения напряженного и деформированного состояний при анализе прочности и разрушения конструкций подземных сооружений может быть преодолена путем использования энергетического подхода [6]. Под таким следует понимать совокупность приемов оперирования энергией деформирования системы «подземное сооружение – окружающий массив».

Определение энергии изложено опирается на классическое предложение Бельтрами об определении энергии деформирования, отнесенной к единице объема (удельная энергия деформирования). Применение фундаментального уравнения Гиббса для процесса деформирования позволяет определить удельную энергию деформирования, используя тензоры напряжений и деформаций:

$$dU = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где dU – удельная (отнесенная к единице объема) внутренняя энергия; σ_{ij} и ε_{ij} – тензоры напряжений и деформаций соответственно.

Через значения удельной энергии можно записать и условие разрушения:

$$dU > dU_{раз}, \quad (2)$$

где $dU_{раз}$ – энергия разрушения конструкции, отыскиваемая из лабораторных исследований материалов, применяемых для подземных сооружений.

Как видно из формул (1) и (2), энергия является интегральной характеристикой НДС системы «подземное сооружение – окружающий массив». И в то же время энергия является критерием прочности, по которому можно определить общее состояние системы, в том числе и ее разрушение [6].

Однако анализ удельной энергии системы «подземное сооружение – окружающий массив» не является окончательным процессом в определении прочности, так как энергия, полученная в расчетах, является конечной, присущей окончательному состоянию, которое полагается эксплуатационным и для которого чаще всего выполняется расчет. В формуле (2) фигурирует характеристика разрушения конструкции, однако никак не учтена степень ее разрушения. За данное наблюдение, которое значительно обогащает энергетический подход в применении к системе «подземное сооружение – окружающий массив», автор благодарен Гайко Г. И., профессору НТУ «Киевский политехнический институт» (кафедра геостроительства и горных технологий).

Цель

Таким образом, целесообразно оценить энергию различных степеней разрушения, что требует нового подхода, который смог бы учесть и постепенное протекание энергии при формировании НДС системы «подземное сооружение – окружающий массив», и ее накопление, вызывающее разрушение. Для разработки новой концепции разрушения подземных сооружений наиболее плодотворным является энергетико-фрактальный подход, который включает в себе и оперирование удельной энергией, и фрактальные представления о природе разрушения [7, 8].

Методика

Энергетико-фрактальный подход – это теоретическое описание процесса разрушения конструкций на разных масштабных уровнях. Изложенные автором положения энергетического подхода несколько модифицируются для более полного описания разрушения, как материала, так и структурных элементов, а также конструкции в целом [8].

Процесс разрушения в рамках фрактальных представлений может быть теоретически представлен в виде перколяции [9-12] по ветвям иерархического фрактального дерева Кейли (ДК) [8, 13]. В англоязычной литературе этот термин известен также как Bethe lattice, который является частным случаем Cayley graph, графа Кейли. Отличие этого концепта от вво-

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

димого ниже ДК состоит в том, что Bethe lattice является не линейным, а циклическим [13].

Именно перколяция является удобным концептуальным приемом для описания критических явлений [11, 12], одним из которых является явление разрушения, подготавливаемое эволюцией структуры в процессе формирования НДС и происходящее внезапно при превышении материалом предела прочности.

Под перколяцией будем понимать способ протекания процесса, обусловленный изменением управляющего параметра (например, рост и слияние трещин в бетоне и арматуре). Управляющим параметром в данном случае является энергия деформирования, а весь процесс описывается деревом Кейли. В данном случае перколяция (от лат. *percōlāre* – просачиваться, протекать) является фазовым переходом в энергетической области. Перколяция описывает с помощью управляющего параметра, т.е. энергии, переход от сплошной среды к среде с трещиной, то есть фазовый переход от целостности к разрушению, когда при плавном изменении одного из параметров системы ее свойства меняются скачком. Первичный акт разрушения материала нормируется энергией разрушения, которая практически определяется из экспериментов.

Теоретически ДК для конкретного случая разрушения можно представить в следующем виде (рис. 1).

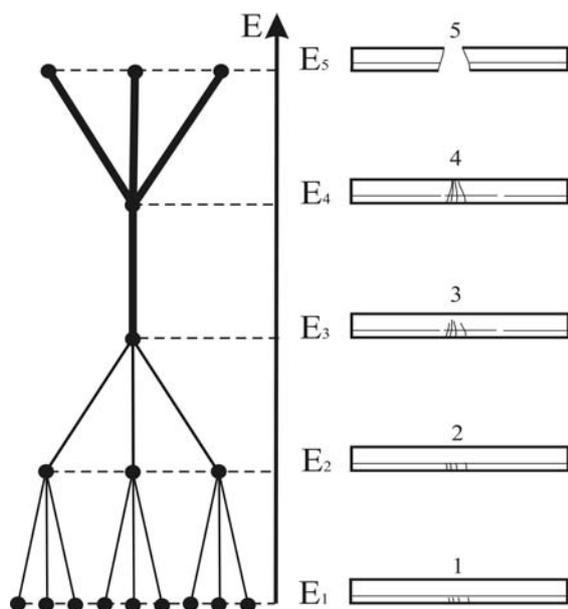


Рис. 1. ДК для многоуровневого разрушения железобетонной конструкции

Свойства ДК разрушения следующие [10, 11]:

1. ДК в общем случае является иерархической фрактальной структурой, ветви которых – ветви бифуркационного процесса (процесс на конце ветви разделяется надвое) или процесса с большим количеством делений.

2. ДК являются древесными структурами, на которых осуществляется перколяция.

3. Наличие «центр – периферии» (система «корень – ветви») структурирует отношение «подчинения – командования».

4. Число уровней в общем случае может быть ДК бесконечно велико, а характер связи между ними не играет определяющей роли (важна только структура дерева).

Важным свойством ДК разрушения является то, что перколяцией с ветви на ветвь управляет приращение энергии деформирования, то есть перколяция явно коррелированная [11]. Практически для случая конструкций подземных сооружений использование ДК разрушения можно приложить к процессу разрушения таким образом: например, для железобетонного прогона колонной станции в ДК разрушения определяются четыре скелетные ветви: 1) разрушение, вызывающее трещины на поверхности бетона; 2) разрушение, вызывающее глубинные трещины в бетоне; 3) разрушение арматуры в элементе; 4) полное разрушение элемента. Как видно из данного ДК разрушения оно является удобным представлением процесса разрушения и ни в коей мере не противоречит классическим понятиям о разрушении железобетона [4, 8].

Используя фрактальные представления, переход с ветви на ветвь ДК разрушения есть ничто иное, как скейлинг (масштабирование). Он происходит в данном случае по трем уровням: микро (разрушение бетона и арматуры), макро (трещина, определяемая визуально), мезо (полное разрушение элемента). Динамикой скейлинга управляет изменение энергии: для первого уровня простейший акт разрушения вводится путем нормирования параметров НДС – по пределу прочности на растяжение/сжатие или более точно – по предельной энергии разрушения материала; для второго уровня – величиной раскрытия трещины и скоростью ее роста; для третьего – нормируется в соответствии с результатами экспериментальных расчетов конструкций.

Результаты

Для практических расчетов в рамках энергетико-фрактального подхода проведен численный анализ трехводчатой станции колонного типа, конечно-элементная (КЭ) модель которой построена на основе реальных геометрических размеров и результатов лабораторных исследований (рис. 2) [4, 14].

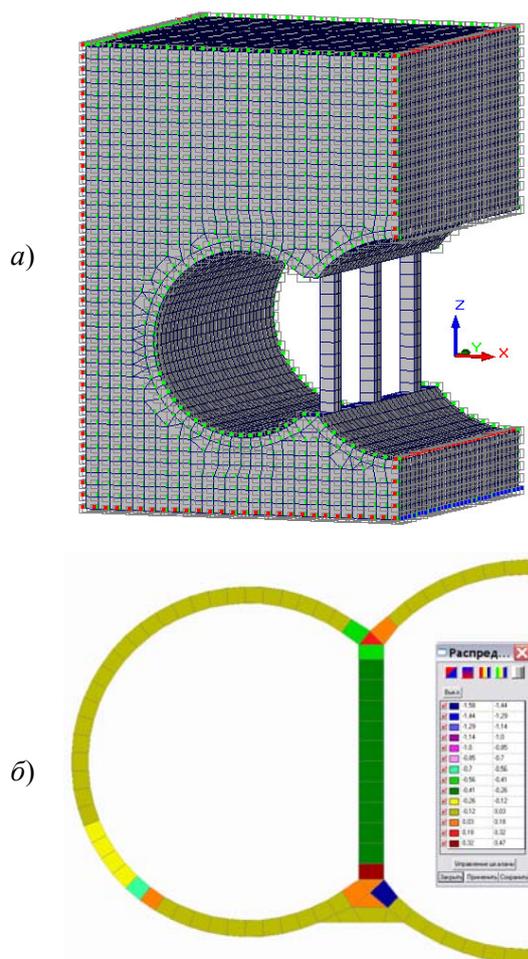


Рис. 2. КЭ-модель колонной станции и результат численного анализа на ее основе:

а) – общий вид; б) – распределение удельной энергии

Проведем анализ значения удельной энергии деформирования (см. рис. 2, б). Для того чтобы его выполнить, следует получить значение удельной энергии разрушения бетона, для чего можно воспользоваться формулами (1) и (2). Удельная энергия разрушения бетона по формуле (1) будет отыскиваться как площадь, отсекаемая графиком « $\sigma - \epsilon$ » при деформировании и разрушении образцов бетона класса

В30 при расчетном сопротивлении на сжатие, равном $17\,000\text{ кН/м}^2$ (17 МПа). Среднее значение удельной энергии разрушения бетона класса В30 при максимальном относительном укорочении $0,01 \dots 0,02$ стандартного образца $10 \times 10 \times 10$ см и хрупком разрушении находится как $dU = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V$. Численно значение удельной энергии разрушения образца равно $dU = 1/2 \cdot 17000 \cdot 0,01 \cdot 0,1^3 = 0,085\text{ КДж} = 85\text{ Дж}$ или 170 Дж (при относительном укорочении $0,02$).

После сравнения по формуле (2) полученной удельной энергии разрушения со значениями, полученными в ходе энергетического постпроцессинга SCAD (см. рис. 2, б), можно сделать вывод, что они меньше удельной энергии разрушения в десятки раз. Таким образом, в ДК для многоуровневого разрушения железобетонной конструкции не достигнута даже первая скелетная ветвь (разрушение, вызывающее трещины на поверхности бетона), однако при изменении в системе «подземное сооружение – окружающий массив» уровня энергии (например, при прогрессирующем разрушении) возможна перколяция энергии.

Научная новизна и практическая значимость

Применение энергетико-фрактального подхода к разрушению строительных конструкций, в том числе и подземных сооружений, является новой методологией анализа НДС, в котором напряженное и деформированное состояние не разделяются, а связаны в удельной энергии деформирования. Фрактальность процесса накопления энергии описывается перколяцией по ветвям дерева Кейли, причем к каждой из ветвей присвоено конкретное значение энергии разрушения материала, полученное из лабораторных исследований. Таким образом, теоретические построения теории разрушения подкрепляются практическими данными, что позволяет наметить новые концептуальные положения разрушения подземных сооружений.

Выводы

Изложив аналитические построения энергетико-фрактального подхода, который включает в себе оперирование удельной энергией де-

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

формирования и фрактальные представления о природе разрушения, а также практические приемы построения дерева Кейли с протекающей перколяцией, можно сделать вывод, что данный подход однозначно разрешает дилемму анализа НДС. Оперирование удельной энергией деформирования и ее перколяция по ветвям ДК позволяет оценить степень разрушения элементов подземных сооружений, оценивая энергетический уровень на каждой ветви.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баклашов, И. В. Механика подземных сооружений и конструкции крепей [Текст] / И. В. Баклашов, Б. А. Картозия. – Москва : Недра, 1984. – 415 с.
2. Булычев, Н. С. Проектирование и расчет крепи капитальных выработок [Текст] / Н. С. Булычев, Н. Н. Фотиева, Е. В. Стрельцов. – Москва : Недра, 1986. – 288 с.
3. Фролов, Ю. С. Метрополитены [Текст] : Учебник для вузов / Ю. С. Фролов, Д. М. Голицынский, А. П. Ледяев. – Москва : Желдориздат, 2001. – 528 с.
4. Петренко, В. І. Розрахунок трисклепінчастих станцій метрополітену глибокого закладення [Текст] / В. І. Петренко, В. Д. Петренко, О. Л. Тютюкін. – Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2004. – 176 с.
5. Петренко, В. Д. Обзор аналитических и экспериментальных методов исследования взаимодействия массива и крепи [Текст] / В. Д. Петренко, А. Л. Тютюкин, В. И. Петренко // Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика. – 2012. – Вип. 1. – С. 75-81.
6. Тютюкін, О. Л. Основи енергетичного підходу до аналізу напружено-деформованого стану системи «кріплення – масив» / О. Л. Тютюкін // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – Дніпропетровськ : Вид-во ДПТУ, 2009. – Вип. 26. – С. 141-146.
7. Булат, А. Ф. Фракталы в геомеханике [Текст] / А. Ф. Булат, В. И. Дырда. – Київ : Наукова думка, 2005. – 358 с.
8. Булат-Корнейчук, Е. А. Научные открытия в механике разрушения [Текст] / Е. А. Булат-Корнейчук, В. И. Дырда. – Днепропетровск : Нова ідеологія, 2006. – 245 с.
9. Grimmett G. Percolation and disordered systems / G. Grimmett. Lectures in Probability Theory and Statistics, Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXVI-1996. Springer Lecture Notes in Math. N. 1665. Ed. P. Bernard, 1997, pp. 153-300.
10. Grimmett, G. Percolation. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1999, vol. 321. 444 p.
11. Тарасевич, Ю. Ю. Перколяція: теорія, застосування, алгоритми [Текст] : Учеб. посібник / Ю. Ю. Тарасевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.
12. Kesten, H. What is percolation. Notices of the AMS, May 2006, pp. 572-573.
13. Ostilli, M. Cayley Trees and Bethe Lattices, a concise analysis for mathematicians and physicists. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2012, Vol. 391, Issue 12, pp. 3417-3423. doi:10.1016/j.physa.2012.01.038
14. Тютюкін, О. Л. Розробка теоретичних основ модифікованого методу розрахунку тунелів колового окреслення [Текст] / О. Л. Тютюкін, В. А. Мірошник // Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика. – 2012. – Вип. 2. – С. 96-100.

О. Л. ТЮТЮКІН*

* Кафедра «Мости і тунелі», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (066) 290 45 18, ел. пошта tutkin@mail.ru, ORCID 0000-0003-4921-4758

КОНЦЕПЦІЯ РУЙНУВАННЯ ПІДЗЕМНИХ СПОРУД НА ОСНОВІ ЕНЕРГЕТИКО-ФРАКТАЛЬНОГО ПІДХОДУ

Мета. Для оцінки енергії різних ступенів руйнування підземних споруд слід розробити новий підхід, який зміг би врахувати поступове протікання енергії при формуванні напружено-деформованого стану системи «підземна споруда – оточуючий масив» і її накопичення. **Методика.** Для розробки нової концепції руйнування підземних споруд плідним є енергетико-фрактальний підхід, який містить в собі оперування питомою енергією і фрактальні уявлення про природу руйнування. Визначення енергії спирається на класичну пропозицію Бельтрамі про визначення енергії деформування, віднесеної до одиниці об'єму (питома ене-

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

ргія деформування). **Результати.** Визначено, що процес руйнування підземних споруд в рамках фрактальних уявлень може бути теоретично представлений у вигляді перколяції по гілках ієрархічного фрактального дерева Кейлі. З'ясовано, що перколяція є зручним концептуальним прийомом для опису критичних явищ, одним з яких є явище руйнування, що підготоване еволюцією структури в процесі формування напружено-деформованого стану і те, що відбувається раптово при перевищенні матеріалом межі міцності. Запропоновано дерево Кейлі для багаторівневого руйнування залізобетонної конструкції, визначені його властивості. Для практичних розрахунків в рамках енергетико-фрактального підходу проведений чисельний аналіз трьохсклепінчастої станції колонного типу. Проведений порівняльний аналіз одержаної питомої енергії руйнування із значеннями, отриманими в ході енергетичного постпроцесінга. **Наукова новизна.** Застосування енергетико-фрактального підходу до руйнування підземних споруд є новою методологією аналізу напружено-деформованого стану, в якому напружений і деформований стан не розділяються, а зв'язані в питомій енергії деформування. **Практична значимість.** Теоретичні побудови теорії руйнування підкріплюються практичними даними, що дозволяє намітити нові концептуальні положення руйнування підземних споруд.

Ключові слова: підземна споруда; дерево Кейлі; перколяція; енергетико-фрактальний підхід

O. L. TIUTKIN*

* Department «Bridges and Tunnels» of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan Str., 2, Dnepropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (066) 290 45 18, e-mail tutkin@mail.ru, ORCID 0000-0003-4921-4758

CONCEPTION OF DESTRUCTION OF UNDERGROUND CONSTRUCTIONS ON THE BASIS OF ENERGY AND FRACTAL APPROACH

Purpose. For estimation of energy of different destruction degrees of underground constructions it is required to develop a new approach which was able to take into account the gradual flowline of energy at forming of the stress-strain state of the system «underground construction – soil massif» and its accumulation. **Methodology.** For development of a new conception of destruction of underground constructions energy and fractal approach which contains operation by specific energy and fractal pictures of destruction nature is most well. Determination of energy is expounded by the classic suggestion Beltrami about determination of energy of deformation, attributed to unit of volume (specific energy of deformation a.k.a strain energy). **Findings.** It is certain that the destruction process of underground constructions within the framework of fractal presentations can be in theory represented as percolation on the branches of the hierarchical fractal Cayley tree. It is found out that percolation is the comfortable conceptual reception for description of the critical phenomena, one of which is the phenomenon of destruction, prepared by evolution of structure in the process of forming of the stress-strain state and what is going on is sudden at exceeding by material of ultimate strength. Cayley tree for multilevel destruction of reinforced concrete construction is offered, his properties are certain. For practical calculations within the energy operation and fractal approach the numerical analysis of the three-wault station of column type is conducted. The comparative analysis of the got specific energy of destruction with the values got during energy post-processing is conducted. **Originality.** Application of energy and fractal approach to destruction of underground constructions is a new methodology of analysis of the stress-strain state, in which the stress and strain state is not divided, and deformations are linked in specific energy. **Practical value.** Theoretical constructions of theory of destruction refresh oneself by practical information, that allows setting new conceptual positions of underground constructions destruction.

Keywords: underground constructions; Cayley tree; percolation; energy and fractal approach

REFERENCES

1. Baklashov I. V., Kartozija B. A. *Mehanika podzemnyh sooruzhenij i konstrukcii krepej* [Mechanics of underground constructions and construction of support]. Moscow, Nedra Publ., 1984. 415 p.
2. Bulychev N. S., Fotieva N. N., Strel'cov E. V. *Proektirovanie i raschet krepj kapital'nyh vyrabotok* [Fasten planning and calculation permanent workings]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 288 p.
3. Frolov Yu. S., Golitsynskiy D. M., Ledyayev A. P. *Metropoliteny* [Metro]. Moscow, Zheldorizdat Publ., 2001. 528 p.

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

4. Petrenko V. I., Petrenko V. D., Tjutjkin O. L. *Rozrakhunok tryzsklepinchastykh stancij metropolitenu ghlybokogho zakladennja* [Calculation of the three-wault stations of metro of deep contour interval]. Dnipropetrovsjk, Nauka i osvita Publ., 2004. 176 p.
5. Petrenko V. D., Tyutkin A. L., Petrenko V. I. *Obzor analiticheskikh i eksperimentalnykh metodov issledovaniya vzaimodeystviya massiva i krepі* [Review of analytical and experimental methods of research of co-operation of massif and support]. *Mosty ta tuneli: teorija, doslidzhennja, praktyka – Bridges and tunnels: theory, research, practice*, 2012, issue 1, pp. 75-81.
6. Tjutjkin, O. L. *Osnovy energhetychnogho pidkходу do analizu napruzhenno-deformovanogho stanu systemy «kriplennja – masyv»* [Bases of energy approach to the analysis of the stress-strain state of the system «support – massif»]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2009, issue 26, pp. 141-146.
7. Bulat A. F., Dyrda V. I. *Fraktaly v geomehanike* [Fractals in geomechanics]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2005. 358 p.
8. Bulat-Kornejchuk E. A., Dyrda V. I. *Nauchnye otkrytija v mehanike razrushenija* [Scientific openings in mechanics of destruction]. Dnepropetrovsk, Nova ideologija Publ., 2006. 245 p.
9. Grimmett G. *Percolation and disordered systems*. Lectures in Probability Theory and Statistics, Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXVI-1996. Springer Lecture Notes in Math. N. 1665. Ed. P. Bernard, 1997, pp. 153-300.
10. Grimmett, G. *Percolation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1999, vol. 321. 444 p.
11. Tarasevich, Ju. Ju. *Perkoljacija: teorija, prilozhenija, algoritmy* [Percolation: theory, appendixes, algorithms]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2002. 112 p.
12. Kesten, H. *What is percolation*. Notices of the AMS, May 2006, pp. 572-573.
13. Ostilli, M. Cayley Trees and Bethe Lattices, a concise analysis for mathematicians and physicists. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012, Vol. 391, Issue 12, pp. 3417-3423. doi:10.1016/j.physa.2012.01.038.
14. Tjutjkin O. L., Miroshnyk V. A. *Rozrobka teoretychnykh osnov modyfikovanogho metodu rozrakhunku tuneliv kolovogho okreslennja* [Development of theoretical bases of the modified calculation method of circular outline tunnels]. *Mosty ta tuneli: teorija, doslidzhennja, praktyka – Bridges and tunnels: theory, research, practice*, 2012, issue 5, pp. 96-100.

Статья рекомендована к публикации д.т.н., проф. Н. Б. Курганом (Украина), д.т.н, проф. И. И. Лучком (Украина).

Поступила в редколлегию 20.07.2016.

Принята к печати 26.09.2016.